Ch 2 : Filtrage numérique

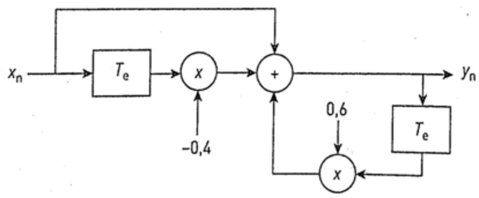
Comme le filtrage analogique, le filtrage numérique a pour objectif d'atténuer le signal pour certaines gammes de fréquence (adaptation audio, équaliseur, atténuation du bruit dans une transmission, etc…). L'avantage principal du filtrage numérique réside dans sa facilité de mise en œuvre sur les systèmes électroniques actuels, où le filtre se réduit à un programme sur micro-contrôleur.

1. Représentation

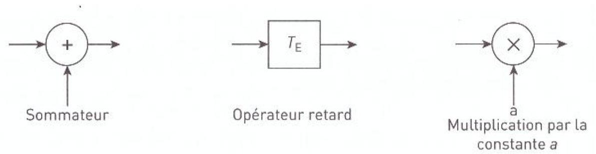
Il existe deux façons équivalentes de représenter un filtre numérique :

1. par son schéma bloc

exemple :



avec les conventions suivantes :



On en déduit l'équation de récurrence : $y_n = x_n - 0,4\ x_{n-1} + 0,6\ y_{n-1}$ qui caractérise le filtre numérique.

2. par sa transmittance en z

Le filtre numérique peut également se définit par sa transformée en z :

$\{x_n\}$ / $X(z)$ → $\{h_n\} \leftrightarrow H(Z)$ → $\{y_n\}$ / $Y(z)$ avec $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, on retrouve l'équation de récurrence à l'aide du théorème du retard : une multiplication par z^{-k} de la TZ se traduisant par un décalage de k échantillons : $z^{-k}\ X(z) \leftrightarrow x_{n-k}$

exemple : $y_n = x_n - 0,4\ x_{n-1} + 0,6\ y_{n-1}$ $\leftrightarrow$ $Y(z) = X(z) - 0,4\ z^{-1}\ X(z) + 0,6\ z^{-1}\ Y(z)$

$\rightarrow Y(z)\ (1 - 0,6\ z^{-1}) = X(z)\ (1 - 0,4\ z^{-1})$

$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 0,4\ z^{-1}}{1 - 0,6\ z^{-1}}$

2. réponse impulsionnelle h_n

1.définition

La réponse impulsionnelle du filtre correspond à la réponse du filtre à une impulsion, c'est-à-dire la valeur de la sortie $\{y_n\}$ pour $x_n = \delta(nT_E) = \{1,0,0,0,0,\ldots\}$
On la note $\{h_n\}$

calcul :

• La fonction de transfert du filtre correspond à la transformée en z de la réponse impulsionnelle. On peut donc retrouver h_n en effectuant la transformée en z inverse de H(z).

• Une autre façon d'obtenir h_n est de la calculer directement à partir de l'équation de récurrence du filtre.

exercice : *Retrouver la réponse impulsionnelle du filtre précédent à l'aide de ces 2 méthodes*

• méthode 1: à partir de l'équation de récurrence:

n	0	1	2	3
Entrée x_n	1	0	0	0
Sortie $h_n = x_n - 0{,}4x_{n-1} + 0{,}6\, h_{n-1}$	h_0 = 1-0+0	h_1 =0-0.4+0.6 = 0.2	h_2=0-0+0.6*0.2 =0.12	h_3 = 0.6*0.12 = 0.072

(➪ on constate qu'on est en présence d'une Réponse Impulsionnelle Infinie)

• méthode 2 : par la TZ inverse : $\rightarrow H(z) = \frac{1-0{,}4\,z^{-1}}{1-0{,}6\,z^{-1}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-0{,}6}$ $\leftrightarrow h_n = \frac{2}{3}\delta(n) + \frac{1}{3}(0{,}6)^n$

2. RIF et RII

On peut classer les filtres numériques en 2 catégories selon leur réponse impulsionnelle :

filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) :

Les échantillons $\{h_n\}$ de la réponse impulsionnelle deviennent nuls à partir d'un certaine rang k.

➪ Les filtres non récursifs ont des RIF

exemple : réponse impulsionnelle du filtre moyenneur défini par $y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$

pour $x_n = \delta(n)$, $y_n = h_n$ $\rightarrow$ $h_n = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0; \ldots\}$

filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) :

Il n'existe pas de rang k à partir duquel la réponse impulsionnelle devienne nulle.

➪ Les filtres récursifs ont des RII

exemple du 1.2: $y_n = x_n - 0{,}4\, x_{n-1} + 0{,}6\, y_{n-1}$ $\rightarrow$ $h_n = \frac{2}{3}\delta(n) + \frac{1}{3}(0{,}6)^n$

les h_n ne s'annulent jamais

Remarque : Un filtre à RII ne signifie pas que la réponse impulsionnelle ne puisse pas s'annuler par endroits.

3. Stabilité

1. définition

Un filtre est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 lorsque n ⟶ ∞.

2. critère de stabilité à partir de la transmittance

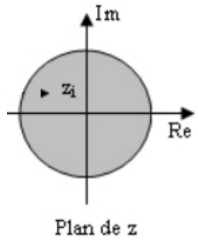
On considère un filtre numérique. Sa fonction de transfert peut se mettre sous la forme

$$H(z) = \frac{a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_k)}$$

$p_1, p_2, .., p_k$ sont appelés les **pôles** de H(z) : ce sont les valeurs de z qui annullent le dénominateur.
(si on pose $H(z) = \frac{N(z)}{D(Z)}$ les pôles se calculent en résolvant l'équation D(z) = 0)

<u>critère de stabilité</u> :

Le filtre est stable si les pôles complexes $\underline{z}_1$, $\underline{z}_2$, …, $\underline{z}_k$ sont situés **à l'intérieur du cercle unité** dans le plan complexe.



exemple du cours : • $H(z) = \frac{z - 0,4}{z - 0,6}$

⇨ le filtre possède un pôle simple $z_1 = 0,6$ $|z_1|<1$, donc le filtre est stable.

• évaluer la stabilité du filtre de transmittance $H(z) = \frac{0,5-z}{1+z+z^2}$

2 pôles complexes sur le cercle ⇨ instable

• déterminer la fonction de transfert du filtre moyenneur. En déduire s'il est stable ou non.

$y_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$ ⟶ $Y(z) = 0.5X(z)+0.5z^{-1}X(z)$ ⟶ $H(z) = 0,5(1+z^{-1}) = \frac{z+1}{2z}$

un seul pôle $z_1=0$ ⇨ *le système est stable*

3. propriété des RIF

Un système à réponse impulsionnelle finie est toujours stable

Ex 5 p 32

4. réponse fréquentielle

1. transmittance complexe

Pour évaluer le comportement fréquentiel du filtre numérique et déterminer quelles sont les fréquences coupées et les fréquences passantes, il faut calculer la transmittance complexe du filtre. Celle-ci s'obtient à partir de la transmittance en z H(z), en effectuant le changement de variable :

$$\boxed{z \leftrightarrow e^{j\omega T_E}}$$

• T_E: période d'échantillonnage du filtre numérique
• ω = 2πf : variable fréquentielle

On se ramène ainsi à une fonction de transfert complexe H(ω), comme dans le cas du filtrage analogique qui dépend donc de la fréquence f du signal d'entrée, mais également de la fréquence d'échantillonnage $f_E = \frac{1}{T_E}$

exemple du filtre moyenneur :

$$H(z) = 0{,}5(1+ z^{-1}) \quad \leftrightarrow \quad \underline{H}(\omega) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{j\omega T_E}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{j\omega T_E}{2}} \left(e^{\frac{j\omega T_E}{2}} + e^{-\frac{j\omega T_E}{2}}\right)$$

$$= e^{\frac{j\omega T_E}{2}} cos(\frac{\omega T_E}{2})$$

2. Représentation graphique

Comme il s'agit de signaux échantillonnés, le critère de Shannon nous limite aux fréquences $f < \frac{f_E}{2}$.

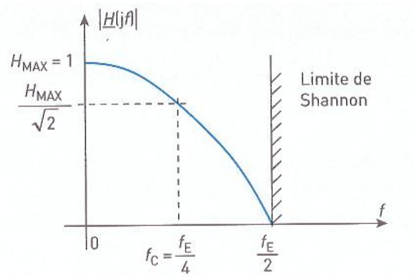
On a coutume d'exprimer la fonction de transfert fréquentielle à l'aide de la fréquence réduite $\boxed{x = \frac{f}{f_E}}$

La représentation graphique sera donc limitée à $x < \frac{1}{2}$

Remarque : Pour visualiser graphiquement la fonction de transfert H(f), il convient de tracer le module et l'argument, comme dans le cas du filtrage analogique : | H |(f) et arg(H)(f).
Le module ne sera cependant pas exprimé en dB comme dans le cas analogique.

exemple du filtre moyenneur :

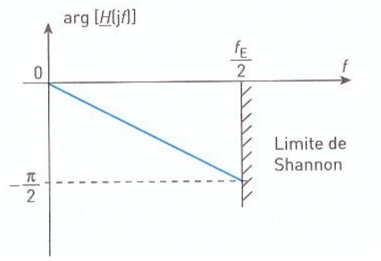
$$\underline{H}(f) = e^{-\frac{j2\pi f T_E}{2}} cos(\frac{2\pi f T_E}{2}) = e^{-\frac{j\pi f}{f_E}} cos(\frac{\pi f}{f_E})$$



⇨ <u>module</u> : | H(f) | = $cos(\frac{\pi f}{f_E})$

jusqu'à $f = \frac{f_E}{2}$ *soit* $|\underline{H}(f)| = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

⇨ <u>argument</u> : arg(H(f)) = $-\frac{\pi f}{f_E}$ *jusqu'à* $f = \frac{f_E}{2}$ *soit* $arg(\underline{H}(f)) = -\frac{\pi}{2}$



Ex 6-7-8-9 p 33-35